SPAZI DI HARDY IN $\mathbb{R}^n$

1. Funzioni test e operatori massimali in $\mathbb{R}^n$

Scopo di questo capitolo è studiare la limitatezza L^1 di operatori massimali e introdurre lo spazio di Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$ attraverso di essi.

Il punto di partenza (negativo) è la Proposizione 15.3 in [AE][1]: l'unica funzione f la cui funzione massimale di Hardy-Littlewood sia integrabile su $\mathbb{R}^n$ è la funzione identicamente nulla.

Per ottenere risultati positivi, è necessario ricorrere a funzioni massimali più "blande", sostituendo alle medie di $|f|$ sulle palle,

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|\,dy \ , \tag{1.1}$$

medie di f pesate con una densità φ dotata di un certo grado di regolarità, e opportunamente traslata e riscalata per adattarsi alla palla in considerazione. Supponendo inizialmente che $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0,1)$, la media che prenderemo in considerazione sulla palla $B = B(x,t)$ sarà

$$\int f(y)t^{-n}\varphi\big(\frac{y-x}{t}\big)\,dy = \int f(y)\varphi_t(y-x)\,dy = f * \varphi_t(x) \ . \tag{1.2}$$

Per evidenziare analogie e differenze tra (1.1) e (1.2), si noti che la media (1.1) può essere espressa come

$$\int |f(x)|\varphi_t(x-x_0)\,dx \ , \qquad \text{con} \ \ \varphi(x) = \frac{1}{|B(0,1)|}\chi_{B(0,1)} \ .$$

In realtà considereremo medie (1.2) anche con funzioni φ che non sono a supporto compatto (e non necessariamente positive). In generale, se $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx \neq 0$, poniamo

$$M_\varphi f(x) = \sup_{t>0}\big|f * \varphi_t(x)\big| \ . \tag{1.3}$$

La condizione $\int\varphi \neq 0$ è ovviamento un rilassamento della normalizzazione $\int\varphi = 1$, caratteristica delle identità approssimate. Tenendo conto della relazione $M_{\lambda\varphi}f = |\lambda| M_\varphi f$ per $\lambda \in \mathbb{C}$, questo rilassamento è inessenziale.

Il Teorema 15.10 si [AE] afferma che, se

$$\varphi^*(x) = \sup_{|y|\geq|x|}|\varphi(y)| \in L^1(\mathbb{R}^n) \ ,$$

allora

$$M_\varphi f(x) \leq \|\varphi^*\|_1 Mf(x) \ ,$$

[1] Indicheremo così i riferimenti agli appunti "Analisi Armonica su Spazi Euclidei".

dove M è l'operatore massimale di Hardy-Littlewood. Ovviamente questa condizione non è però sufficiente a garantire l'esistenza di funzioni f non nulle tali che $M_\varphi f$ sia integrabile.

Mostriamo con un esempio che una tale f esiste se φ ha un minimo di regolarità.
Esempio. Prendiamo φ con supporto nella palla unitaria e Hölderiana di ordine $\delta > 0$. Si prenda f limitata, con $\operatorname{supp} f \subset B(0,R)$ e con $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 0$. Allora

$$f * \varphi_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi_t(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\big(\varphi_t(x-y) - \varphi_t(x)\big)\,dy \ .$$

Ma

$$\big|\varphi_t(x-y) - \varphi_t(x)\big| = t^{-n}\Big|\varphi\big(\frac{x-y}{t}\big) - \varphi\big(\frac{x}{t}\big)\Big| \le C\frac{|y|^\delta}{t^{n+\delta}} \ ,$$

per cui

$$\big|f*\varphi_t(x)\big| \le Ct^{-n-\delta}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||y|^\delta\,dy = C't^{-n-\delta} \ .$$

D'altro canto, se $|x| > R$, $f * \varphi_t$ può essere non nullo solo a condizione che $(\operatorname{supp} f) \cap B(x,t) \neq \emptyset$, e dunque che $t > |x| - R$. Quindi, per $|x| > R$,

$$M_\varphi f(x) = C' \sup_{t>|x|-R} t^{-n-\delta} = C'(|x|-R)^{-n-\delta} \ .$$

In particolare, se $|x| > 2R$, si ha $|x| - R > |x|/2$, e dunque

$$\int_{|x|>2R} M_\varphi f(x)\,dx \le C'' \int_{|x|>2R} |x|^{-n}\,dx < \infty \ .$$

Per $|x| < 2R$ vale la maggiorazione $|f * \varphi_t(x)| \le \|f\|_\infty \|\varphi\|_1$, per cui $M_\varphi f$ è limitata. Dunque $M_\varphi f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Nel seguito dovremo utilizzare diversi tipi di operatori massimali, che iniziamo a classificare per grandi linee.

1. **Operatori massimali definiti da un'unica funzione** φ.
   Questi si diversificano ulteriormente come segue:
   (i) operatori massimali "centrati", ossia gli M_φ in (1.3);
   (ii) operatori massimali "non centrati",

   $$\tilde M_{\varphi,b} f(x) = \sup_{t>0\,,\,|y-x|<bt} |f * \varphi_t(y)| \ ,$$

   per $b > 0$;
   (iii) operatori massimali "estremamente non centrati",

   $$M^*_{\varphi,N} f(x) = \sup_{t>0\,,\,y\in\mathbb{R}^n} \big(1 + \frac{|y-x|}{t}\big)^{-N} |f * \varphi_t(y)| \ ,$$

   per $N > 0$.

2. “Grand maximal operators”
Si considera una famiglia Φ di funzioni φ con date condizioni di regolarità e opportunamente normalizzate, e si pone

$$\mathcal{M}_\Phi f(x) = \sup_{\varphi\in\Phi} M_\varphi f(x) \ , \qquad \tilde{\mathcal{M}}_{\Phi,b} f(x) = \sup_{\varphi\in\Phi} \tilde{M}_{\varphi,b} f(x) \ , \qquad \mathcal{M}^*_{\Phi.N} f(x) = \sup_{\varphi\in\Phi} M^*_{\varphi,N} f(x) \ .$$

Negli operatori del primo tipo si impone la condizione che $\int\varphi \neq 0$, mentre in quelli del secondo tipo le limitazioni imposte sugli elementi di Φ devono consentire la presenza di funzioni con integrale diverso da zero.

Con riferimento agli operatori del primo tipo, è utile avere una visualizzazione grafica delle diverse condizioni di variazione dei parametri t, y rispetto ai quali si prende il sup.

Sul semispazio $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, si consideri la funzione $u = u_\varphi$ data da

$$u(x,t) = f * \varphi_t(x) \ .$$

Fissato $x \in \mathbb{R}^n$, consideriamo la semiretta verticale $R_x = \{x\} \times (0, +\infty)$ e i coni di apertura b, con vertice in x,

$$\Gamma_{x,b} = \{(y,t) : |x-y| < bt\} \ . \tag{1.4}$$

Allora

$$M_\varphi f(x) = \sup_{R_x} |u| \ , \qquad \tilde{M}_{\varphi,b} f(x) = \sup_{\Gamma_{x,b}} |u| \ ,$$

mentre

$$M^*_{\varphi,N} f(x) = \sup_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \Big(1 + \frac{|x-y|}{t}\Big)^{-N} |u(y,t)| \ ,$$

in cui i valori di u sulle varie semirette uscenti da x sono pesati in modo diverso.

Con riferimento a questa rappresentazione, gli operatori della forma $\tilde{M}_{\varphi,b}$ si chiamano anche “non tangenziali”.

Un caso particolarmente interessante è quello in cui $\varphi = P$,

$$P(x) = \frac{c_n}{\big(1+|x|^2\big)^{\frac{n+1}{2}}} \ ,$$

dove la costante $c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$ è scelta in modo che $\int_{\mathbb{R}^n} P(x)\,dx = 1$.

Le funzioni

$$P_t(x) = c_n \frac{t}{\big(t^2+|x|^2\big)^{\frac{n+1}{2}}}$$

formano il *nucleo di Poisson* che interviene nella soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^{n+1}_+ \\ u_{|t=0} = f \ . \end{cases} \tag{1.5}$$

Per $f \in (L^1 + L^\infty)(\mathbb{R}^n)$, $u(x,t) = f * P_t(x)$ è l'unica soluzione del problema (1.5) che sia limitata nei sotto-semispazi $t \geq t_0 > 0$.

Un caso ugualmente interessante è legato all'equazione del calore

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta_x u & \text{in } \mathbb{R}^{n+1}_+ \\ u_{|t=0} = f \ . \end{cases} \tag{1.6}$$

In questo caso, per $f \in (L^1+L^\infty)(\mathbb{R}^n)$, l'unica soluzione del problema (1.5) che sia limitata nei sotto-semispazi $t \geq t_0 > 0$ è data da $u(x,t) = f * W_{\sqrt{t}}$, dove il *nucleo di Weierstrass* $W_{\sqrt{t}}$ è ottenuto a partire dalla funzione

$$W(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4}} \ .$$

Si noti che $W \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, mentre P non ha decadimento rapido.

2. Confronti tra "grand maximal functions"

Ci sono alcune ovvie relazioni tra le funzioni massimali sopra introdotte. Per esempio,

$$M_\varphi f(x) \leq \tilde{M}_{\varphi,b} f(x) \ , \qquad M_\varphi f(x) \leq M^*_{\varphi,N} f(x) \ , \qquad \tilde{M}_{\varphi,b} f(x) \leq (1+b)^N M^*_{\varphi,N} f(x) \ . \tag{2.1}$$

Le stesse relazioni valgono per le corrispondenti "grand maximal functions". Per particolari famiglie Φ, si hanno anche relazioni inverse. Prendiamo per esempio

$$\Phi_m = \big\{ \varphi \in C^m : \operatorname{supp} \varphi \subset B(0,1) \ , \ \|\varphi\|_{C^m} \leq 1 \big\} \ . \tag{2.2}$$

Proposizione 2.1. *Valgono le relazioni*

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}_{\Phi_m} f(x) \leq \tilde{\mathcal{M}}_{\Phi_m,b} f(x) \leq (1+b)^{n+m} \mathcal{M}_{\Phi_m} f(x) \\ &\mathcal{M}_{\Phi_m} f(x) = \mathcal{M}^*_{\Phi_m,n+m} f(x) \ . \end{aligned}$$

Dimostrazione. Le disuguaglianze $\mathcal{M}_{\Phi_m} f(x) \leq \cdots$ sono ovvie. Prendiamo ora $\varphi \in \Phi_m$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Se $y = x + tv$, poniamo $\psi(x) = \varphi(x+v)$. Allora

$$\begin{aligned} f * \varphi_t(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) t^{-n} \varphi\Big(\frac{x-z}{t} + v\Big)\, dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) t^{-n} \psi\Big(\frac{x-z}{t}\Big)\, dz \\ &= f * \psi_t(x) \ . \end{aligned}$$

Ora, ψ ha supporto nella palla $B(0, 1+|v|)$ e $\|\psi\|_{C^m} \leq 1$. Posto $\tilde{\psi}(x) = (1+|v|)^n \psi\big((1+|v|)x\big)$, si ha $\operatorname{supp} \tilde{\psi} \subset B(0,1)$ e $\|\tilde{\psi}\|_{C^m} \leq (1+|v|)^{n+m}$. Dunque $\tilde{\psi} \in (1+|v|)^{n+m} \Phi_m$.

Poiché $\psi_t = \tilde{\psi}_{t(1+|v|)^{-n}}$ per ogni $t > 0$, si ha allora

$$|f * \varphi_t(y)| \leq (1+|v|)^{n+m} \mathcal{M}_{\Phi_m} f(x) = \big(1 + \frac{|y-x|}{t}\big)^{n+m} \mathcal{M}_{\Phi_m} f(x) \ ,$$

e questo dà la tesi in entrambi i casi. ∎

Relazioni analoghe si possono ottenere per famiglie di funzioni Hölderiane di ordine $\delta \in (0,1]$,

$$\Phi_\delta = \{\varphi : \operatorname{supp}\varphi \subset B(0,1)\,,\ \|\varphi\|_{\Lambda_\delta} \le 1\}\ , \tag{2.3}$$

dove

$$\|\varphi\|_{\Lambda^\delta} = \|\varphi\|_\infty + \sup_{x,y}|x-y|^{-\delta}\big|\varphi(x)-\varphi(y)\big|\ .$$

Prendiamo ora

$$\Phi_m^\infty = \big\{\varphi \in C^\infty : \operatorname{supp}\varphi \subset B(0,1)\ ,\ \|\varphi\|_{C^m} \le 1\big\}\ .$$

Si noti che, nonostante si prendano funzioni C^∞, la normalizzazione è data in termini della norma C^m.

Proposizione 2.2. *Vale l'uguaglianza*

$$\mathcal{M}_{\Phi_m^\infty} f(x) = \mathcal{M}_{\Phi_m} f(x)\ . \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Essendo la disuguaglianza $\le$ ovvia, basta verificare che, dati $\varphi \in \Phi_m$ e $t > 0$,

$$\big|f * \varphi_t(x)\big| \le \sup_{\psi\in\Phi_m^\infty,\, t>0}\big|f*\psi_t(x)\big|\ . \tag{2.5}$$

Sia $\{\eta_s\}_{s>0}$ un'identità approssimata, con $\eta \ge 0$ di classe C^∞, $\operatorname{supp}\eta \subset B(0,1)$ e $\int\eta = 1$. Sia $\delta > 0$ tale che $\operatorname{supp}\varphi \subset \overline{B(0,1-\delta)}$. Se $s<\delta$, $\varphi*\eta_s$ ha supporto in $B(0,1)$, $\varphi*\eta_s \in C^\infty$ e $\|\varphi*\eta_s\|_{C^m} \le \|\varphi\|_{C^m}\|\eta_s\|_1 \le 1$. Quindi $\varphi*\eta_s \in \Phi_m^\infty$ e dunque

$$\big|f*(\varphi*\eta_s)_t(x)\big| \le \mathcal{M}_{\Phi_m^\infty} f(x)\ .$$

Ma allora

$$\big|f*\varphi_t(x)\big| = \lim_{s\to 0}\big|f*\varphi_t*\eta_{st}(x)\big| = \lim_{s\to 0}\big|f*\varphi_t*\eta_{st}(x)\big| \le \mathcal{M}_{\Phi_m^\infty} f(x)\ ,$$

da cui segue la (2.5). □

In modo analogo si dimostra che, per $0<\delta\le 1$,

$$\mathcal{M}_{\Phi_\delta^\infty} f(x) = \mathcal{M}_{\Phi_\delta} f(x)\ .$$

Naturalmente la normalizzazione del supporto delle φ alla palla unitaria non è essenziale. Infatti, se φ ha supporto nella palla $B(0,R)$, con $R>1$, la funzione $\varphi_{R^{-1}}(x) = R^n\varphi(Rx)$ ha supporto nella palla unitaria e $(\varphi_{R^{-1}})_t = \varphi_{R^{-1}t}$. Pertanto,

$$M_\varphi f(x) = M_{\varphi_{R^{-1}}} f(x)\ .$$

A partire da questa osservazione, possiamo giungere a confronti che coinvolgono φ non a supporto compatto.

Introduciamo le norme di Schwartz

$$\|\varphi\|_{(m,s)} = \sum_{|\alpha|\le m}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\big(1+|x|\big)^{s+|\alpha|}|\partial^\alpha f(x)|\ ,$$

in cui $m\in\mathbb{N}$ e $s>0$.

Lemma 2.3. *Sia $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora, per ogni m, s con $s > n$,*
$$M_\varphi f(x) \leq C_{m,s} \|\varphi\|_{(m,s)} \mathcal{M}_{\Phi_m} f(x) \ .$$

Dimostrazione. Scomponiamo φ in una serie di funzioni a supporto compatto nel modo seguente. Sia η una funzione C^∞, tale che $0 \leq \eta \leq 1$, $\operatorname{supp} \eta \subset B(0,1)$ e $\eta = 1$ su $B(0, \frac{1}{2})$. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,
$$1 = \lim_{k \to +\infty} \eta(2^{-k}x) = \eta(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \big(\eta(2^{-k}x) - \eta(2^{-k+1}x) \big) \ .$$

Poniamo $\tilde{\eta}(x) = \eta(x) - \eta(2x)$. Allora
$$\varphi(x) = \varphi(x)\eta(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(x)\tilde{\eta}(2^{-k}x) \ .$$

Abbiamo $\operatorname{supp} \varphi\eta \subset B(0,1)$ e, per $k \geq 1$, $\operatorname{supp} \varphi\tilde{\eta}(2^{-k}\cdot) \subset B(0,2^k) \setminus B(0,2^{k-2})$. Per $k \geq 1$, riscaliamo di un fattore 2^k, ponendo
$$\psi_k(x) = 2^{nk} \varphi(2^k x) \tilde{\eta}(x) \ ,$$
e fissiamo α con $|\alpha| \leq m$. Siccome ψ_k ha supporto dove $\frac{1}{4} \leq |x| \leq 1$,
$$\big| \partial^\alpha \psi_k(x) \big| \leq C_m \sum_{\beta \leq \alpha} 2^{k(n+|\beta|)} |\partial^\beta \varphi(2^k x)| |\partial^{\alpha-\beta} \tilde{\eta}(x)| \leq C'_m \|\varphi\|_{(m,s)} 2^{-k(s-n)} \ .$$

Lo stesso tipo di stima vale ovviamente anche per $\psi_0 = \varphi\eta$. Quindi
$$M_\varphi f(x) \leq \sum_{k=0}^{\infty} M_{\psi_k} f(x) \leq C'_m \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(s-n)} \|\varphi\|_{(m,s)} \ . \quad \Box$$

Corollario 2.4. *Sia*[2]
$$\mathcal{S}_{m,s} = \{ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_{(m,s)} \leq 1 \} \ , \tag{2.6}$$
con $s > n$. Allora
$$\mathcal{M}_{\mathcal{S}_{m,s}} f(x) \leq C_{m,s} \mathcal{M}_{\Phi_m} f(x) \ .$$

3. Confronti tra "grand maximal functions" e funzioni massimali del primo tipo

Vediamo ora come una singola funzione massimale "estremamente non centrata" $M^*_{\varphi,N} f$ (con φ opportuna) possa controllare *puntualmente* una "grand maximal function".

Iniziamo col supporre $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e imponiamo le seguenti normalizzazioni[3]:

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$;

---

[2]Se $m = s$ scriviamo semplicemente $\mathcal{S}_m$.

[3]Data una qualunque $\varphi \in \mathcal{S}$ con $\int \varphi \neq 0$, esistono $\lambda \neq 0$ e $t > 0$ tali che $\lambda\varphi_t$ soddisfi (i) e (ii). Ai fini dello studio di operatori masismali, questa restrizione non è dunque sostanziale.

(ii) $\|\varphi\|_{(1)} \leq 1$.

La chiave del metodo sta nel seguente lemma.

Lemma 3.1. *Esistono* $\psi_0, \psi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *con* $\operatorname{supp} \widehat{\psi_0} \subset B(0, \frac{1}{2})$, $\operatorname{supp} \widehat{\psi_1} \subset B(0, \frac{1}{2}) \setminus B(0, \frac{1}{8})$, *tali che*

$$\psi_0 * \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_1)_{2^{-k}} * \varphi_{2^{-k}} = \delta_0 \ , \tag{3.1}$$

nel senso delle distribuzioni.

Dimostrazione. Passando alla trasformata di Fourier, abbiamo, per la (i), $\hat{\varphi}(0) = 1$ e

$$\big|\hat{\varphi}(\xi) - 1\big| = \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)(e^{-i\xi\cdot x} - 1)\, dx \Big| \leq |\xi| \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)||x|\, dx \leq |\xi| \ .$$

Quindi $|\hat{\varphi}(\xi)| \geq \frac{1}{2}$ se $|\xi| \leq \frac{1}{2}$.

Sia u una funzione C^∞ con supporto nella palla $B(0, \frac{1}{2})$, tale che $0 \leq u(\xi) \leq 1$ per ogni ξ e $u(\xi) = 1$ per $|\xi| \leq \frac{1}{4}$. Per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
1 &= \lim_{m\to\infty} u(2^{-m}\xi) \\
&= \lim_{k\to\infty} \Big(u(\xi) + \sum_{k=1}^{m} \big(u(2^{-k}\xi) - u(2^{-k+1}\xi) \big) \Big) \\
&= u(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \big(u(2^{-k}\xi) - u(2^{-k+1}\xi) \big) \\
&= u(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} v(2^{-k}\xi) \ ,
\end{aligned}$$

dove si è posto $v(\xi) = u(\xi) - u(2\xi)$. Notiamo che $\operatorname{supp} v \subset \{\xi : \frac{1}{8} \leq |\xi| \leq \frac{1}{2}\}$, per cui in ogni punto ci sono al massimo tre addendi della serie che sono diversi da 0. Notiamo anche che sia u che v hanno supporto dove $|\hat{\varphi}| \geq \frac{1}{2}$. ne consegue che $\frac{u}{\hat{\varphi}}$, $\frac{v}{\hat{\varphi}}$ sono C^∞ a supporto compatto. Esistono dunque $\psi_0, \psi_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tali che

$$\widehat{\psi_0} = \frac{u}{\hat{\varphi}} \ , \qquad \widehat{\psi_1} = \frac{v}{\hat{\varphi}} \ .$$

Quindi

$$\widehat{\psi_0}(\xi)\hat{\varphi}(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\psi_1}(2^{-k}\xi)\hat{\varphi}(2^{-k}\xi) = 1$$

puntualmente e nel senso delle distribuzioni. Invertendo la trasformata di Fourier si ha la tesi. □

Corollario 3.2. *Siano* φ, ψ_0, ψ_1 *come nel Lemma 3.1. Data* $\eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *vale l'identità*

$$\eta = (\eta * \psi_0) * \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \big(\eta * (\psi_1)_{2^{-k}} \big) * \varphi_{2^{-k}} \ , \tag{3.2}$$

dove, per ogni norma di Schwartz $\|\ \|_{(m)}$ *e ogni* $N\in\mathbb{N}$, *esiste* N' *tale che*

$$\big\|\eta*(\psi_1)_{2^{-k}}\big\|_{(m)}\le C_{m,N}2^{-Nk}\|\eta\|_{(N')}\ . \tag{3.3}$$

In particolare la serie converge in ogni norma di Schwartz.

Dimostrazione. Iniziamo dimostrando la (3.3). Poiché la trasformata di Fourier è un isomorfismo di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, basta dimostrare la (3.3) con $\mathcal{F}\big((\eta*(\psi_1)_{2^{-k}}\big)$ al posto di $\eta*(\psi_1)_{2^{-k}}$.

La trasformata di Fourier di $\eta*(\psi_1)_{2^{-k}}$ è $\hat\eta(\xi)\widehat{\psi_1}(2^{-k}\xi)$, quindi ha supporto dove $2^{k-3}\le|\xi|\le 2^{k-1}$. Si ha dunque, per $|\alpha|\le m$,

$$\begin{aligned}\big|\partial^\alpha\big(\hat\eta(\xi)\widehat{\psi_1}(2^{-k}\xi)\big)\big|&\le\sum_{\beta\le\alpha}c_{\alpha,\beta}2^{-k|\beta|}\big|\partial^{\alpha-\beta}\hat\eta(\xi)\big|\big|(\partial^\beta\widehat{\psi_1}(2^{-k}\xi)\big|\\&\le\|\widehat{\psi_1}\|_{C^m}\sum_{\beta\le\alpha}c_{\alpha,\beta}2^{-k|\beta|}\|\hat\eta\|_{(m+N)}\big(1+|\xi|\big)^{-m-N}\\&\le C\|\widehat{\psi_1}\|_{C^m}\|\hat\eta\|_{(m+N)}2^{-Nk}\big(1+|\xi|\big)^{-m}\ .\end{aligned}$$

Quindi

$$\|\hat\eta\,\widehat{\psi_1}(2^{-k}\cdot)\|_{(m)}\le C\|\widehat{\psi_1}\|_{C^m}2^{-Nk}\|\hat\eta\|_{(m+N)}\ .$$

Il resto segue facilmente. □

Il Corollario 3.2 consente di "trasferire" stime per operatori massimali definiti in termini di φ ad altri definiti in termini di altre funzioni test.

Teorema 3.3. *Siano* φ,η *come nel Corollario 3.2. Per ogni* $t>0$ *e* $N\in\mathbb{N}$, *esiste* N' *per cui*

$$\big|f*\eta_t(x)\big|\le C\|\eta\|_{(N')}M^*_{\varphi,N}f(x)\ .$$

Dimostrazione. Per la (3.2),

$$\big|f*\eta_t(x)\big|\le\big|f*(\eta*\psi_0)_t*\varphi_t(x)\big|+\sum_{k=1}^\infty\big|f*\big(\eta*(\psi_1)_{2^{-k}}\big)_t*\varphi_{2^{-k}t}(x)\big|\ .$$

Usando la disuguaglianza $f*\varphi_t(y)\le\big(1+\frac{|x-y|}{t}\big)^NM^*_{\varphi,N}f(x)$, valida per ogni $x,y\in\mathbb{R}^n$, si ha

$$\begin{aligned}\big|f*\big(\eta*(\psi_1)_{2^{-k}}\big)_t*\varphi_{2^{-k}t}(x)\big|&\le\int_{\mathbb{R}^n}|f*\varphi_t(y)|\big|\big(\eta*(\psi_1)_{2^{-k}}\big)_t(x-y)\big|\,dy\\&\le M^*_{\varphi,N}f(x)\int_{\mathbb{R}^n}\Big(1+\frac{|x-y|}{t}\Big)^N\big|\big(\eta*(\psi_1)_{2^{-k}}\big)_t(x-y)\big|\,dy\\&=M^*_{\varphi,N}f(x)\int_{\mathbb{R}^n}\Big(1+\frac{|y|}{t}\Big)^N\big|\big(\eta*(\psi_1)_{2^{-k}}\big)_t(y)\big|\,dy\\&=M^*_{\varphi,N}f(x)\int_{\mathbb{R}^n}(1+|y|)^N\big|\big(\eta*(\psi_1)_{2^{-k}}\big)(y)\big|\,dy\ .\end{aligned}$$

Per la (3.3) con $m = n+1$, segue che esiste N' per cui

$$\begin{aligned}\left|f * \big(\eta * (\psi_1)_{2^{-k}}\big)_t * \varphi_{2^{-k}t}(x)\right| &\leq C_N 2^{-k}\|\eta\|_{(N')} M^*_{\varphi,N} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} (1+|y|)^{-n-1}\, dy \\ &\leq C'_N 2^{-k}\|\eta\|_{(N')} M^*_{\varphi,N} f(x)\ .\end{aligned}$$

Sommando in k e valutando il termine contenente ψ_0 alla stessa maniera, si ha la tesi. □

Corollario 3.4. *Sia $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con $\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx\right| = \lambda > 0$. Per ogni N esiste N' tale che*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{S}_{N'}} f(x) \leq C\lambda^{-1} M^*_{\varphi,N} f(x)\ .$$

L'ultima relazione che vogliamo introdurre riguarda il confronto tra la funzione massimale "estremamente non centrata" $M^*_{\varphi,N} f$ e le corrispondenti funzioni massimali non centrate $\tilde{M}_{\varphi,b} f$. In questo caso, tuttavia, non otterremo delle maggiorazioni puntuali, ma solo in norma L^p.

Dobbiamo premettere alcune considerazioni riguardanti una *generica funzione* misurabile $u(x,t) \geq 0$ definita sul semispazio $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Esse saranno poi applicate a $u(x,t) = |f * \varphi_t(x)|$.

Indicando con $\Gamma_{x,b} \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$ il cono di vertice x e apertura $b > 0$, definito nella (1.4), poniamo

$$u^*_b(x) = \sup_{(y,t)\in\Gamma_{x,b}} u(y,t)\ .$$

Lemma 3.5. *Dato $b > 0$, sia*

$$A^\alpha_b = \{x \in \mathbb{R}^n : u^*_b(x) > \alpha\}\ .$$

Se $0 < b < b'$, valgono le disuguaglianze

$$|A^\alpha_b| \leq |A^\alpha_{b'}| \leq C\Big(1 + \frac{b'}{b}\Big)^n |A^\alpha_b|\ .$$

Dimostrazione. Essendo $u^*_b \leq u^*_{b'}$, $A^\alpha_b \subset A^\alpha_{b'}$ e la prima disuguaglianza è ovvia.

Sia ora $x \in A^\alpha_{b'}$. Vuol dire che esiste $(y,t) \in \Gamma_{x,b'}$ tale che $u(y,t) > \alpha$. Quindi, se $|z-y| < bt$, $(y,t) \in \Gamma_{z,b}$ e dunque $u^*_b(z) > \alpha$. Ciò significa che $B(y,bt) \subset A^\alpha_b$.

Poiché $|y-x| < b't$, si ha anche $B(y,bt) \subset B\big(x,(b+b')t\big)$. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned}\frac{1}{\big|B\big(x,(b+b')t\big)\big|}\int_{B\left(x,(b+b')t\right)} \chi_{A^\alpha_{b'}}(z)\, dz &= \frac{\big|A^\alpha_{b'} \cap B\big(x,(b+b')t\big)\big|}{\big|B\big(x,(b+b')t\big)\big|} \\ &\geq \frac{|B(y,bt)|}{\big|B\big(x,(b+b')t\big)\big|} \\ &= \Big(\frac{b}{b+b'}\Big)^n\ .\end{aligned}$$

Indicando con M la funzione massimale di Hardy-Littlewood, si ha perciò

$$M\chi_{A^\alpha_{b'}}(x) \geq \Big(\frac{b}{b+b'}\Big)^n\ ,$$

e dunque

$$A^\alpha_{b'} \subset \Big\{x : M\chi_{A^\alpha_{b'}}(x) \geq \Big(\frac{b}{b+b'}\Big)^n\Big\} \ .$$

Per il Teorema 15.5 di [AE],

$$\begin{aligned} |A^\alpha_{b'}| &\leq \Big|\Big\{x : M\chi_{A^\alpha_{b'}}(x) \geq \Big(\frac{b}{b+b'}\Big)^n\Big\}\Big| \\ &\leq C\Big(1+\frac{b'}{b}\Big)^n \|\chi_{A^\alpha_{b'}}\|_1 \\ &= C\Big(1+\frac{b'}{b}\Big)^n |A^\alpha_b| \ . \quad \square \end{aligned}$$

Proposizione 3.6. *Vale la disuguaglianza*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^*_{b'}(x)\,dx \leq C\Big(1+\frac{b'}{b}\Big)^n \int_{\mathbb{R}^n} u^*_b(x)\,dx \ .$$

Dimostrazione. Segue direttamente dal Teorema 8.1 in [AE]. $\square$

Corollario 3.7. *Sia $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Le norme $\big\|\tilde{M}_{\varphi,b}f\big\|_1$ sono equivalenti fra loro al variare di b.*

Se $N > n$,

$$\big\|M^*_{\varphi,N}f\big\|_p \leq C_N\big\|\tilde{M}_{\varphi,1}f\big\|_p \ .$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} M^*_{\varphi,N}f(x) &\leq \sup_{j\geq 0} 2^{-Nj} \sup_{2^jt\leq|y-x|<2^{j+1}t} |f*\varphi_t(y)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-Nj}\tilde{M}_{\varphi,2^j}f(x) \ . \end{aligned}$$

Per la Proposizione 3.6,

$$\begin{aligned} \big\|M^*_{\varphi,N}f\big\|_1 &\leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-Nj}\big\|\tilde{M}_{\varphi,2^j}f\big\|_1 \\ &\leq C\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(N-n)j}\big\|\tilde{M}_{\varphi,1}f\big\|_1 \\ &\leq C\big\|\tilde{M}_{\varphi,1}f\big\|_1 \ . \quad \square \end{aligned}$$

A conclusione di tutto quanto visto sui vari operatori massimali[4], diamo un risultato riassuntivo sulla equivalenza delle norme L^1. Si noti che per $p > 1$ le equivalenze sono conseguenze ovvie del fatto che $\|f\|_p$ è equivalente a $\|Mf\|_p$ per l'operatore di Hardy-Littlewood M, e che ciascuna degli operatori massimali introdotti è dominato, a meno di costanti moltiplicatice, da M.

[4]Si rinvia al libro di E. M. Stein, *Harmonic Analysis. Real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals* per l'ampliamento di questa serie di equivalenze agli operatori massimali centrati M_φ con $\varphi \in \mathcal{S}$ e M_P, dove P indica il nucleo di Poisson.

Teorema 3.8. *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(i) $\mathcal{M}_\Phi f \in L^1$, *con* Φ *una delle famiglie* (2.2), (2.3), *ø*(2.6) *con* $s > n$*;*
(ii) $\tilde{\mathcal{M}}_{\Phi,b} f \in L^1$, *con* Φ *come sopra;*
(iii) $\mathcal{M}^*_{\Phi,N} f \in L^1$, *con* Φ *come sopra;*
(iv) $\tilde{M}_{\varphi,b} f \in L^1$, *con* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *e* $b > 0$*;*
(v) $M^*_{\varphi,N} f \in L^1$, *con* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *e* $N > n$*;*

Le norme L^1 *di tali funzioni massimali, quando sono finite, sono equivalenti fra loro.*

4. Lo spazio $H^1(\mathbb{R}^n)$ e la sua struttura atomica

Definizione 4.1. *Si indica con* $H^1(\mathbb{R}^n)$ *lo spazio delle funzioni* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *tali che una qualunque delle sue funzioni massimali indicate nel Teorem 3.8 sia integrabile.*

Fissato, per es., un operatore "grand maximal" $\mathcal{M}_\Phi$, poniamo

$$\|f\|_{H^1} = \|\mathcal{M}_\Phi f\|_1 \ .$$

Lemma 4.2. $H^1(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ *con inclusione continua.* $H^1(\mathbb{R}^n)$ *è completo.*

Dimostrazione. Sia $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Si prenda $\varphi \in \Phi$, con $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = a > 0$. Per ogni $t > 0$, $|f * \varphi_t| \leq \mathcal{M}_\Phi f$ e $\lim_{t\to 0} f * \varphi_t(x) = af(x)$ quasi ovunque. Quindi $|f(x)| \leq \mathcal{M}_\Phi f(x)$ quasi ovunque, per cui $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\|f\|_1 \leq \|f\|_{H^1}$.

Sia $\{f_m\}$ una successione di Cauchy in $H^1(\mathbb{R}^n)$. Esiste allora $\lim_{m\to\infty} f_m = f$ in norma L^1. Data $\varphi \in \Phi$,

$$\big|(f - f_m) * \varphi_t(x)\big| = \lim_{k\to\infty} \big|(f_k - f_m) * \varphi_t(x)\big| \leq \sup_{k>m} \mathcal{M}_\Phi(f_k - f_m)(x) \ .$$

Quindi,

$$\mathcal{M}_\Phi(f - f_m)(x) \leq \sup_{k>m} \mathcal{M}_\Phi(f_k - f_m)(x) \ .$$

Da ciò segue che $f - f_m \in H^1(\mathbb{R}^n)$, e dunque $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Inoltre

$$\|f - f_m\|_{H^1} \leq \sup_{k>m} \|f_k - f_m\|_{H^1} \ ,$$

per cui $\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_{H^1} = 0$. □

Individuiamo ora una speciale famiglia di elementi di $H^1(\mathbb{R}^n)$, detti *atomi*.

Definizione 4.3. *Sia* $1 < q \leq \infty$. *Si chiama* $(1,q)$*-atomo una funzione* $a(x)$*, con supporto in una palla* B *e tale che*

(i) $\|a\|_q \leq |B|^{-1+\frac{1}{q}}$;
(ii) $\int_B a(x)\, dx = 0$.

Lemma 4.4. *Un* $(1,q)$ *atomo* a *è in* $H^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $\|a\|_{H^1}$ *è limitata da una costante indipendente da* a*.*

(La dimostrazione ricalca l'Esempio nel paragrafo 1.)

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con supporto in $B(0,1)$, $\int \varphi \neq 0$. Allora

$$M_\varphi a(x) \le C_\varphi Ma(x) \ ,$$

dove Ma è la funzione massimale di Hardy-Littlewood. Per il Teorema 16.3 in [AE],

$$\|M_\varphi a\|_q \le C_{\varphi,n,q}\|a\|_q \le C_{\varphi,n,q}|B|^{-1+\frac{1}{q}} \ .$$

Se $B = B(x_0, r)$, poniamo $B^* = B(x_0, 2r)$. Per la disuguaglianza di Hölder,

$$\int_{B^*} M_\varphi a(x)\, dx \le |B^*|^{\frac{1}{q'}}\|M_\varphi a\|_q \le C_{\varphi,n,q}2^{\frac{n}{q'}} \ .$$

Se $x \notin B^*$, occorre che $t > |x - x_0| - r$ per poter avere $a * \varphi_t(x) \neq 0$. Usando la proprietà (ii) di media nulla di a, si ha

$$\begin{aligned} a * \varphi_t(x) &= \int_B a(y)t^{-n}\varphi\big(\frac{x-y}{t}\big)\, dt \\ &= \int_B a(y)t^{-n}\Big(\varphi\big(\frac{x-y}{t}\big) - \varphi\big(\frac{x-x_0}{t}\big)\Big)\, dy \ . \end{aligned}$$

Per il Teorema del valor medio,

$$\Big|\varphi\big(\frac{x-y}{t}\big) - \varphi\big(\frac{x-x_0}{t}\big)\Big| \le C_\varphi \frac{|y-x_0|}{t} \le C_\varphi \frac{r}{t} \ ,$$

per cui, tenendo conto che $t > |x - x_0| - r > \frac{|x-x_0|}{2}$,

$$\begin{aligned} \big|a * \varphi_t(x)\big| &\le 2^{n+1}C_\varphi \frac{r}{|x-x_0|^{n+1}} \int_B |a(y)|\, dy \\ &\le 2^{n+1}C_\varphi \frac{r}{|x-x_0|^{n+1}} |B|^{\frac{1}{q'}}\|a\|_q \\ &\le 2^{n+1}C_\varphi \frac{r}{|x-x_0|^{n+1}} \ . \end{aligned}$$

Di conseguenza, $M_\varphi a(x) \le 2^{n+1}C_n r|x-x_0|^{-n-1}$ per $x \notin B^*$, e dunque

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B^*} M_\varphi a(x)\, dx \le 2^{n+1}C_\varphi \int_{|x-x_0|>2r} \frac{r}{|x-x_0|^{n+1}}\, dx \le C_{n,\varphi} \ ,$$

come si verifica facilmente integrando in coordinate polari con polo in x_0. □

Dimostriamo ora il seguente risultato fondamentale.

Teorema 4.5. *Sia $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Esiste allora una successione $\{a_j\}$ di $(1,\infty)$-atomi e una successione di scalari $\{\lambda_j\} \in \ell^1$ tali che*

(i) $f = \sum_{j=0}^\infty \lambda_j a_j$;

(ii) $\sum_{j=0}^\infty |\lambda_j| \le C_n\|f\|_{H^1}$.

La dimostrazione è basata su un adattamento della decomposizione di Calderón-Zygmund (v. Teorema 16.5 in [AE]), e il suo punto di partenza è la decomposizione di Whitney del Lemma 16.4.

Dimostrazione. Siano k, k' come nell'enunciato del Lemma 16.4 in [AE], e data una palla $B = B(x_0, r)$, siano $B^* = B(x_0, kr)$, $B^{**} = B(x_0, k'r)$. Consideriamo la funzione massimale $\tilde{\mathcal{M}}_{\Phi_1,b} = \tilde{\mathcal{M}}_{\Phi_1^\infty,b}$, dove b sarà determinato più avanti.

La funzione $\tilde{\mathcal{M}}_{\Phi_1,b}f$ è semicontinua inferiormente. Infatti, se $\tilde{\mathcal{M}}_{\Phi_1,b}f(x) > \alpha$, esistono $\varphi \in \Phi_1$, $t > 0$ e y con $|x - y| < k't$ tali che $|f * \varphi_t(y)| > \alpha$. Per la continuità di $f * \varphi_t$, esiste $\delta > 0$ tale che $|f * \varphi_t(y')| > \alpha$ per ogni y' con $|y' - y| < \delta$. Di conseguenza, $\tilde{\mathcal{M}}_{\Phi_1,b}f(x') > \alpha$ se $|x - x'| < \delta$.

Fissato $\alpha > 0$, l'insieme $A_\alpha = \{x : \tilde{\mathcal{M}}_{\Phi_1,b}f(x) > \alpha\}$ è dunque aperto, e ammette perciò una decomposizione di Whitney $\{B_j = B(x_j, r_j)\}$, dove, posto $F_\alpha = \mathbb{R}^n \setminus A_\alpha$,

(i) le palle B_j sono aperte e a due a due disgiunte;
(ii) $\bigcup_j B_j^* = A_\alpha$ e il raggio kr_j di B_j^* è uguale a $\frac{1}{2}d(x_j, F_\alpha)$;
(iii) $B_j^{**} \cap F_\alpha \neq \emptyset$.

Introduciamo anche le palle $\widetilde{B_j} = B\big(x_j, \frac{3}{2}kr_j\big)$, in modo che $B_j^* \subset \widetilde{B_j} \subset A_\alpha$, e $d(\widetilde{B_j}, F_\alpha) = \frac{1}{4}d(x_j, F_\alpha)$.

Per ogni j, sia ψ_j una funzione C^∞ con supporto in $\widetilde{B_j}$, con $0 \le \psi_j \le 1$, uguale a 1 su un intorno di $\overline{B_j^*}$, e con $|\partial^\alpha \psi_j| \le C_\alpha r_j^{-|\alpha|}$ per ogni α. La funzione

$$\Psi(x) = \sum_j \psi_j(x)$$

è ben definita e C^∞ in A_α perché nell'intorno di ogni punto solo un numero finito di addendi è diverso da zero. Infatti, per la (ii) è sufficiente vedere che solo un numero finito di $\widetilde{B_j}$ intersecano una data palla $\widetilde{B_{j_0}}$. Se $B\big(x_j, \frac{3}{2}kr_j\big) \cap B(x_{j_0}, \frac{3}{2}kr_{j_0}) \neq \emptyset$, devono valere le seguenti condizioni:

$$d(x_j, F_\alpha) = 2kr_j \ , \qquad d(x_{j_0}.F_\alpha) = 2kr_{j_0} \ , \qquad |x_j - x_{j_0}| < \frac{3}{2}k(r_j + r_{j_0}) \ .$$

Quindi $2kr_j \le \frac{3}{2}kr_j + \frac{7}{2}kr_{j_0}$ e $2kr_{j_0} \le \frac{7}{2}kr_j + \frac{3}{2}kr_{j_0}$, ossia $\frac{1}{7}r_{j_0} \le r_j \le 7r_{j_0}$. Inoltre $|x_j - x_{j_0}| \le 12kr_{j_0}$. Ma allora la palla $\mathcal{B} = B\big(x_{j_0}, (12k + 7)r_{j_0}\big)$ contiene l'intera palla B_j. Questa ha volume non inferiore a $7^{-n}|B_{j_0}| = \big(7(12k + 7)\big)^{-n}|\mathcal{B}|$. Siccome tali palle sono a due a due disgiunte, il loro numero non può superare $\big(7(12k + 7)\big)^n = N$.

Siccome ogni punto di A_α appartiene ad almeno una palla B_j^*, abbiamo dunque $1 \le \Psi(x) \le N$ su A_α. Ovviamente, $\Psi = 0$ su F_α. Poniamo

$$\tilde{\psi}_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\Psi(x)} \ .$$

Ovviamente, $\operatorname{supp}\tilde\psi_j \subset \widetilde{B_j}$, $0 \le \tilde\psi_j \le 1$ e $\sum_j \tilde\psi_j = \chi_{A_\alpha}$. Fissato j_0, e indicando con E_{j_0} l'insieme dei j per cui $\widetilde{B_j} \cap \widetilde{B_{j_0}} \neq \emptyset$,

$$\left|\partial^\alpha \tilde\psi_{j_0}\right| = \frac{1}{\Psi^2}\Big|\Psi\nabla\psi_{j_0} - \psi_{j_0}\sum_{j\in E_{j_0}}\nabla\psi_j\Big| \le \left|\nabla\psi_{j_0}\right| + \sum_{j\in E_{j_0}}\left|\nabla\psi_j\right| \ .$$

Siccome $r_j \sim r_{j_0}$ per $j \in E_{j_0}$, esiste una costante C_1 per cui $\left|\nabla\tilde\psi_{j_0}\right| \le C_1 r_{j_0}^{-1}$.

Esprimendo la generica $\tilde\psi_j(x)$ come $\varphi_j\big(\frac{x-x_j}{t_j}\big)$, con $t_j = \frac{3}{2}kr_j$, il raggio di $\widetilde{B_j}$, vediamo che $\operatorname{supp}\varphi_j \subset B(0,1)$, $\|\varphi_j\|_\infty \le 1$ e $\|\nabla\varphi_j\|_\infty \le \frac{3}{2}kC_1$. Quindi $\varphi_j \in \big(1+\frac{3}{2}kC_1\big)\Phi_1^\infty$.

Scomponiamo dunque f come

$$f = f\chi_{F_\alpha} + \sum_j f\tilde\psi_j \ . \tag{4.1}$$

Ovviamente, $|f(x)| \le \tilde{\mathcal{M}}_{\Phi_1^\infty,b}f(x) \le \alpha$ per $x \in F_\alpha$. Scomponiamo ora

$$f\tilde\psi_j = (f-c_j)\tilde\psi_j + c_j\tilde\psi_j \ ,$$

in modo tale che $\int (f-c_j)\tilde\psi_j = 0$. Posto $\mu_j = \int\tilde\psi_j$, ciò vuol dire porre

$$c_j = \frac{1}{\mu_j}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\tilde\psi_j(x)\,dx \ . \tag{4.2}$$

Siccome $\psi_j = 1$ su B_j^*, si ha

$$\mu_j \ge \frac{|B_j^*|}{N} = C_2 r_j^n \ .$$

Quindi

$$\begin{aligned}
|c_j| &\le C_2^{-1}r_j^{-n}\Big|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_j\big(\frac{x-x_j}{t_j}\big)\,dx\Big| \\
&= C_2^{-1}\big(\frac{t_j}{r_j}\big)^n\big|f*(\check\varphi_j)_{t_j}(x_j)\big| \\
&= C_3\big|f*(\check\varphi_j)_{t_j}(x_j)\big| \ .
\end{aligned}$$

Siccome $B_j^{**} \cap F_\alpha \neq \emptyset$, esiste $y \in F_\alpha$ tale che $|y - x_j| < k'r_j = \frac{2k'}{3k}t_j$. Se quindi poniamo $b = \frac{2k'}{3k}$, possiamo dire che

$$|c_j| \le C_3\big|f*(\check\varphi_j)_{t_j}(x_j)\big| \le C_3\tilde{\mathcal{M}}_{\Phi_1,b}f(y) \le C_3\alpha \ . \tag{4.3}$$

Riscriviamo dunque la scomposizione (4.1) come

$$\begin{aligned}
f &= \Big(f\chi_{F_\alpha} + \sum_j c_j\tilde\psi_j\Big) + \sum_j (f-c_j)\tilde\psi_j \\
&= g + \sum_j (f-c_j)\tilde\psi_j \ ,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

dove

$$|g| \le C\alpha \ ,$$

$$\int (f-c_j)\tilde\psi_j = 0 \ , \qquad \operatorname{supp}(f-c_j)\tilde\psi_j \subset \widetilde{B}_j \ .$$

La scomposizione (4.4) dipende ovviamente da α. Poiché vogliamo ora prendere in considerazione valori diversi di α, precisamente $\alpha = 2^m$ con $m \in \mathbb{Z}$, introduciamo opportuni apici: $g^{(m)}$, $c_j^{(m)}$, $\tilde{\psi}_j^{(m)}$, ecc., notando che le costanti $C_1, C_2, \dots$ intervenute nelle disuguaglianze non dipendono da m.

Osserviamo che

$$\lim_{m\to-\infty} g^{(m)} = 0 \ , \qquad \lim_{m\to+\infty} g^{(m)} = f$$

quasi ovunque, nel primo caso perché $|g^{(m)}| \le 2^m$, nel secondo perché $\sum_j b_j^{(m)}$ ha supporto su A_{2^m}, e $|A_{2^m}| \le 2^{-m}\|\mathcal{M}_{\Phi_1,b}\|_1$ per la disuguaglianza di Chebichev. Quindi

$$f = \lim_{m\to+\infty} g^{(m)} - \lim_{m\to-\infty} g^{(m)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (g^{(m+1)} - g^{(m)}) \ . \tag{4.5}$$

Per la (4.4),

$$g^{(m+1)} - g^{(m)} = \sum_j (f - c_j^{(m)})\tilde{\psi}_j^{(m)} - \sum_{j'} (f - c_{j'}^{(m+1)})\tilde{\psi}_{j'}^{(m+1)} \ .$$

Lavorando sui termini a secondo membro arriveremo a costruire gli $(1,\infty)$-atomi che compongono la funzione f. Osserviamo che ciascun addendo ha supporto in una palla e ha media nulla. Tuttavia non è, in generale, una funzione limitata.

Osserviamo che $(f - c_{j'}^{(m+1)})\tilde{\psi}_{j'}^{(m+1)}$ ha supporto in $A_{2^{m+1}} \subset A_{2^m}$. Pertanto,

$$(f - c_{j'}^{(m+1)})\tilde{\psi}_{j'}^{(m+1)} = \sum_j (f - c_{j'}^{(m+1)})\tilde{\psi}_j^{(m)}\tilde{\psi}_{j'}^{(m+1)} \ ,$$

e dunque

$$g^{(m+1)} - g^{(m)} = \sum_j (f - c_j^{(m)})\tilde{\psi}_j^{(m)} - \sum_{j,j'} (f - c_{j'}^{(m+1)})\tilde{\psi}_j^{(m)}\tilde{\psi}_{j'}^{(m+1)} \ .$$

Gli addendi dell'ultima serie non hanno tuttavia media nulla, che tuttavia possiamo ripristinare ponendo, in analogia con (4.2),

$$d_{j,j'}^{(m)} = \frac{1}{\mu_{j'}^{(m+1)}} \int \big(f(x) - c_{j'}^{(m+1)}\big)\tilde{\psi}_j^{(m)}(x)\tilde{\psi}_{j'}^{(m+1)}(x)\, dx \ , \tag{4.6}$$

di modo che

$$\int \Big(\big(f(x) - c_{j'}^{(m+1)}\big)\tilde{\psi}_j^{(m)}(x) - d_{j,j'}^{(m)}\Big)\tilde{\psi}_{j'}^{(m+1)}(x)\, dx = 0 \ .$$

Notiamo che, per la (4.6),

$$\sum_j d_{j,j'}^{(m)} = \frac{1}{\mu_{j'}^{(m+1)}} \int \big(f(x) - c_{j'}^{(m+1)}\big)\tilde{\psi}_{j'}^{(m+1)}(x)\, dx = 0 \ .$$

Pertanto,

$$
\begin{aligned}
g^{(m+1)} - g^{(m)} &= \sum_j (f - c_j^{(m)})\tilde\psi_j^{(m)} - \sum_{j,j'} \big((f - c_{j'}^{(m+1)})\tilde\psi_j^{(m)} - d_{j,j'}^{(m)}\big)\tilde\psi_{j'}^{(m+1)} \\
&= \sum_j \Big((f - c_j^{(m)})\tilde\psi_j^{(m)} - \sum_{j'} \big((f - c_{j'}^{(m+1)})\tilde\psi_j^{(m)} - d_{j,j'}^{(m)}\big)\tilde\psi_{j'}^{(m+1)}\Big) \\
&= \sum_j b_j^{(m)} \ .
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Vediamo ora le proprietà dei singoli termini

$$
b_j^{(m)} = (f - c_j^{(m)})\tilde\psi_j^{(m)} - \sum_{j'} \big((f - c_{j'}^{(m+1)})\tilde\psi_j^{(m)} - d_{j,j'}^{(m)}\big)\tilde\psi_{j'}^{(m+1)} \ . \tag{4.8}
$$

Per cominciare, $\int b_j^{(m)} = 0$. Osserviamo poi che la somma è estesa ai soli $j' \in E_j^{(m)}$ per cui $\widetilde B_j^{(m)} \cap \widetilde B_{j'}^{(m+1)} \neq \emptyset$, perché altrimenti $\tilde\psi_j^{(m)}\tilde\psi_{j'}^{(m+1)} = 0$ e $d_{j,j'}^{(m)} = 0$. Quindi

$$
\operatorname{supp} b_j^{(m)} \subset \widetilde B_j^{(m)} \cup \bigcup_{j' \in E_j^{(m)}} \widetilde B_{j'}^{(m+1)} \ .
$$

Come visto sopra, i raggi $r_j^{(m)}$ e $r_{j'}^{(m+1)}$ delle palle $B_j^{(m)}$ e $B_{j'}^{(m+1)}$ soddisfano le condizioni

$$
2kr_j^{(m)} = d(x_j^{(m)}, F_{2^m}) \ , \qquad 2kr_{j'}^{(m+1)} = d(x_{j'}^{(m+1)}, F_{2^{m+1}}) \le d(x_{j'}^{(m+1)}, F_{2^m}) \ .
$$

Essendo $d(x_{j'}^{(m+1)}, F_{2^m}) \le |x_{j'}^{(m+1)} - x_j^{(m)}| + d(x_j^{(m)}, F_{2^m})$, segue che

$$
2kr_{j'}^{(m+1)} \le \frac{3}{2}k(r_{j'}^{(m+1)} + r_j^{(m)}) + 2kr_j^{(m)} \ ,
$$

e dunque che $r_{j'}^{(m+1)} \le 7r_j^{(m)}$. In conclusione,

$$
\operatorname{supp} b_j^{(m)} \subset B(x_j^{(m)}, 15r_j^{(m)}) \ .
$$

Mostriamo ora che $b_j^{(m)}$ è limitata. Raggruppando i termini contenenti f nella (4.8), si ha

$$
\begin{aligned}
b_j^{(m)} &= f\Big(1 - \sum_{j'} \tilde\psi_{j'}^{(m+1)}\Big)\tilde\psi_j^{(m)} - c_j^{(m)}\tilde\psi_j^{(m)} + \sum_{j'} \big(c_{j'}^{(m+1)}\tilde\psi_j^{(m)} + d_{j,j'}^{(m)}\big)\tilde\psi_{j'}^{(m+1)} \\
&= f\chi_{F_{2^{m+1}}}\tilde\psi_j^{(m)} - c_j^{(m)}\tilde\psi_j^{(m)} + \sum_{j'} \big(c_{j'}^{(m+1)}\tilde\psi_j^{(m)} + d_{j,j'}^{(m)}\big)\tilde\psi_{j'}^{(m+1)} \ .
\end{aligned}
$$

Su $F_{2^{m+1}}$, $|f| \le 2^{m+1}$. Per la (4.3), $|c_j^{(m)}| \le C_3 2^m$ e $|c_{j'}^{(m+1)}| \le C_3 2^{m+1}$. Quanto a $d_{j,j'}^{(m)}$, si ha, per la (4.6),

$$
|d_{j,j'}^{(m)}| \le \frac{1}{\mu_{j'}^{(m+1)}} \Big| \int f(x)\tilde\psi_j^{(m)}(x)\tilde\psi_{j'}^{(m+1)}(x)\,dx \Big| + |c_{j'}^{(m+1)}| \ .
$$

Per stimare l'integrale, possiamo ripetere l'argomento usato per dimostrare la (4.3), con $\mu_{j'}^{(m+1)}$, $\tilde{\psi}_j^{(m)}\tilde{\psi}_{j'}^{(m+1)}$ e $B_{j'}^{(m+1)}$ al posto di μ_j, $\tilde{\psi}_j$ e B_j rispettivamente. Ciò è possibile perché, per la regola di Leibniz,

$$\left|\nabla(\tilde{\psi}_j^{(m)}\tilde{\psi}_{j'}^{(m+1)})\right| \le \frac{C_1}{r_j^{(m)}} + \frac{C_1}{r_{j'}^{(m+1)}} \le \frac{8C_1}{r_{j'}^{(m+1)}} \ .$$

In questo modo si ottiene che $|d_{j,j'}^{(m)}| \le C_4 2^m$. Pertanto,

$$\Big|\sum_{j'}\big(c_{j'}^{(m+1)}\tilde{\psi}_j^{(m)} + d_{j,j'}^{(m)}\big)\tilde{\psi}_{j'}^{(m+1)}\Big| \le \sum_{j'}(2C_3 2^m + C_4 2^m)\tilde{\psi}_{j'}^{(m+1)} \le (2C_3 + C_4)2^m \ .$$

In conclusione, $|b_j^{(m)}| \le C_5 2^m$, e dunque

$$b_j^{(m)} = C_5 2^m \big|B_j^{(m)}\big|\, a_j^{(m)} \ ,$$

dove $a_j^{(m)}$ è un $(1,\infty)$-atomo.

Per la (4.5) e la (4.7),

$$f = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_j \lambda_j^{(m)}\, a_j^{(m)} \ ,$$

con $\lambda_j^{(m)} = C_5 2^m\big|B_j^{(m)}\big|$.

Poiché, per m fissato, le palle $B_j^{(m)}$ sono a due a due disgiunte e contenute in A_{2^m},

$$\begin{aligned}\sum_{j,m}\lambda_j^{(m)} &\le C_5\sum_{m\in\mathbb{Z}} 2^m|A_{2^m}| \\ &\le 2C_5\sum_{m\in\mathbb{Z}}\int_{2^{m-1}}^{2^m}|A_\alpha|\,d\alpha \\ &= 2C_5\int_0^\infty |A_\alpha|\,d\alpha \\ &= 2C_5\int_{\mathbb{R}^n}\tilde{\mathcal{M}}_{\Phi_1,b}f(x)\,dx \\ &\le C_6\|f\|_{H^1} \ . \quad \square\end{aligned}$$

Si noti che la scomposizione atomica di una funzione $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ fornita dal Teorema 4.5 non è unica. Tenendo conto di ciò, si ottiene il seguente corollario.

Corollario 4.6. *Per $q \in (1,\infty]$, sia $H^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle funzioni $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ rappresentabili come somme di $(1,q)$-atomi*

$$f(x) = \sum_{j=0}^\infty \lambda_j\, a_j(x) \ , \tag{4.9}$$

con $\sum_{j=0}^\infty|\lambda_j| < \infty$. Si ponga su $H^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ la norma

$$\|f\|_{H^{1,q}} = \inf\Big\{\sum_{j=0}^\infty|\lambda_j| : f = \sum_{j=0}^\infty \lambda_j\, a_j \ , \ a_j \ (1,q)\text{-atomi}\Big\} \ .$$

Allora $H^{1,q}(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$ per ogni q e le rispettive norme sono equivalenti.

Dimostrazione. Poiché gli $(1,\infty)$-atomi sono anche $(1,q)$-atomi per $1 < q < \infty$, si ha evidentemente che $H^{1,\infty} \subset H^{1,q}$ e $\|f\|_{H^{1,q}} \leq \|f\|_{H^{1,\infty}}$. Il Lemma 4.4 implica che $H^{1,q} \subset H^1$ e $\|f\|_{H^1} \leq C_{n,q}\|f\|_{H^{1,q}}$. Il Teorema 4.5 implica che $H^1 \subset H^{1,\infty}$ e $\|f\|_{H^{1,\infty}} \leq C_6\|f\|_{H^1}$. $\square$

Osserviamo infine che la serie (4.9) converge a f in norma H^1. Infatti, essendo

$$f(x) - \sum_{j=0}^{N} \lambda_j \, a_j(x) = \sum_{j=N+1}^{\infty} \lambda_j \, a_j(x) \ ,$$

si ha

$$\Big\| f - \sum_{j=0}^{N} \lambda_j \, a_j \Big\|_{H^{1,q}} \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} |\lambda_j| \ . \tag{4.10}$$

5. $BMO(\mathbb{R}^n)$ come spazio duale di $H^1(\mathbb{R}^n)$

Siccome ogni singolo atomo ha media nulla,

$$f \in H^1(\mathbb{R}^n) \implies \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = 0 \ .$$

Tuttavia l'implicazione inversa non vale. Si possono esibire esempi espliciti, ma si può anche osservare che se fosse $H^1(\mathbb{R}^n) = L^1_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1 : \int f = 0\}$, allora lo spazio duale di $H^1(\mathbb{R}^n)$ sarebbe $L^\infty(\mathbb{R}^n)/\{\text{costanti}\}$.

Vediamo ora che invece lo spazio duale consiste delle funzioni con *oscillazione media limitata.*

Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Se B è una palla, indichiamo con f_B la media di F su B,

$$f_b = \frac{1}{|B|} \int_B f(x)\, dx \ .$$

Si chiama *oscillazione media di ordine* q di f su una palla B il numero

$$\text{mo}_q(f, B) = \Big(\frac{1}{|B|} \int_B \big| f(x) - f_B \big|^q \, dx \Big)^{\frac{1}{q}} \ .$$

Definizione 5.1. *Dato q, $1 \leq q < \infty$, si pone*

$$\|f\|_{BMO_q} = \sup_B \text{mo}_q(f, B) \ .$$

Si chiama $BMO_q(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle classi di equivalenza, modulo funzioni costanti, di funzioni tali che $\|f\|_{BMO_q} < \infty$.

Per $q = \infty$, la condizione $\sup_B \text{mo}_\infty(f, B) < \infty$ equivale alla limitatezza di f. Invece, per $q < \infty$, BMO_q contiene (classi di equivalenza di) funzioni illimitate. Premettiamo un lemma.

Lemma 5.2. *Sia $f \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le q < \infty$. Supponiamo che per ogni palla B esista una costante c_B tale che*

$$\sup_B \Big(\frac{1}{|B|} \int_B \big|f(x) - c_B\big|^q \, dx \Big)^{\frac{1}{q}} < \infty \ .$$

Allora $f \in BMO_q(\mathbb{R}^n)$ e $\|f\|_{BMO_q} \le 2 \sup_B \Big(\frac{1}{|B|} \int_B \big|f(x) - c_B\big|^q \, dx \Big)^{\frac{1}{q}}$.

Dimostrazione. Per ogni palla B ha

$$\begin{aligned} |f_B - c_B| &= \Big| \frac{1}{|B|} \int_B f(x) \, dx - c_B \Big| \\ &= \Big| \frac{1}{|B|} \int_B \big(f(x) - c_b \big) \, dx \Big| \\ &\le \Big(\frac{1}{|B|} \int_B \big|f(x) - c_B\big|^q \, dx \Big)^{\frac{1}{q}} \ . \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathrm{mo}_q(f,B) \le 2 \Big(\frac{1}{|B|} \int_B \big|f(x) - c_B\big|^q \, dx \Big)^{\frac{1}{q}} \ . \quad \square$$

Esempio.
La funzione $f(x) = \log|x|$ ha norma BMO_1 finita. Sia $B = B(x_0, r)$ una palla. Se $|x_0| > 2r$, si ha $\frac{1}{2}|x_0| \le |x| \le \frac{3}{2}|x_0|$ per ogni $x \in B$, e dunque $\big| \log|x| - \log|x_0| \big| \le \log 2$.
Posto $c_B = \log|x_0|$, si ha dunque

$$\mathrm{mo}_1(f,B) \le \frac{2}{|B|} \int_B \big| \log|x| - \log|x_0| \big| \, dx \le C \ .$$

Se $|x_0| \le 2r$, $B \subset B' = B(0, |x_0| + r)$ e $|B'| \le 3^n |B|$. Quindi, con $c_B = \log\big(|x_0| + r\big)$, il cambio di variabile $x = \big(|x_0| + r\big)y$ dà

$$\begin{aligned} \mathrm{mo}_1(f,B) &\le \frac{2\,3^n}{|B'|} \int_{B'} \big| \log|x| - \log\big(|x_0| + r\big) \big| \, dx \\ &= C \int_{|y|<1} \big| \log|y| \big| \, dy \ . \end{aligned}$$

Teorema 5.3. *Siano $q \in [1, \infty)$, $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e $f = \sum_j \lambda_j \, a_j$ una sua decomposizione in $(1, q')$-atomi. Data $b \in BMO_q$, la serie*

$$\sum_j \lambda_j \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x) b(x) \, dx \tag{5.1}$$

è assolutamente convergente e il suo valore non dipende né dalla scelta del rappresentante della classe di equivalenza $b \in BMO_q$, né dalla decomposizione atomica di f. Chiamando $\ell(f)$ tale valore, ℓ è un funzionale lineare continuo su $H^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$|\ell(f)| \le \|b\|_{BMO_q} \|f\|_{H^{1,q'}} \ . \tag{5.2}$$

Viceversa, dati ℓ funzionale lineare continuo su H^1 e $q \in [1, \infty)$, esiste una e una sola $b \in BMO_q$ con $\|b\|_{BMO_q} \leq C_q \|\ell\|$ per cui valga (5.1).

Come immediata conseguenza si ha:

Corollario 5.4. *Gli spazi $BMO_q(\mathbb{R}^n)$, con $q \in [1, \infty)$, coincidono tra loro, con equivalenza delle rispettive norme.*

Indicheremo tale spazio con $BMO(\mathbb{R}^n)$.

Dobbiamo premettere un lemma alla dimostrazione del Teorema 5.3. Si noti che l'enunciato contiene un abuso di notazione: le funzioni $|b|$ e b_α sono diverse a seconda del particolare rappresentante scelto nella classe di equivalenza in BMO_q.

Lemma 5.5. *Se $b \in BMO_q$, anche $|b| \in BMO_q$ e $\big\| \, |b| \, \big\|_{BMO_q} \leq 2\|b\|_{BMO_q}$. Dato $\alpha > 0$,*

$$b_\alpha(x) = \begin{cases} b(x) & \text{se } |b(x)| \leq \alpha \\ \alpha \dfrac{b(x)}{|b(x)|} & \text{se } |b(x)| > \alpha \end{cases}$$

è in BMO_q e $\|b_\alpha\|_{BMO_q} \leq 2\|b\|_{BMO_q}$.

Dimostrazione. La prima parte dell'enunciato segue dalla disuguaglianza

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int_B \big||b(x)| - |b_B|\big|^q \, dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \Big(\frac{1}{|B|}\int_B \big|b(x) - b_B\big|^q \, dx\Big)^{\frac{1}{q}} ,$$

e dal Lemma 5.2.

Per quanto riguarda b_α, sia B una palla. Se $|b_B| \leq \alpha$, vale la disuguaglianza

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int_B \big|b_\alpha(x) - b_B\big|^q \, dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \Big(\frac{1}{|B|}\int_B \big|b(x) - b_B\big|^q \, dx\Big)^{\frac{1}{q}} ,$$

perché, se $|b(x)| > \alpha$, una semplice considerazione geometrica mostra che $\big|b_\alpha(x) - b_B\big| < \big|b(x) - b_B\big|$, essendo $b_\alpha(x)$ la proeizione di $b(x)$ sul cerchio di raggio α.

Se $|b_B| > \alpha$, vale la disuguaglianza

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int_B \Big|b_\alpha(x) - \alpha\frac{b_B}{|b_B|}\Big|^q \, dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \Big(\frac{1}{|B|}\int_B \big|b(x) - b_B\big|^q \, dx\Big)^{\frac{1}{q}} ,$$

come pure segue da semplici considerazioni geometriche. □

Dimostrazione del Teorema 5.3. Se a è un $(1, q')$-atomo con supporto in una palla B, si ha

$$\begin{aligned} \Big|\int_{\mathbb{R}^n} a(x)b(x)\, dx\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\big(b(x) - b_B\big)\, dx\Big| \\ &\leq \|a\|_{q'}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |b(x) - b_B|^q \, dx\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \Big(\frac{1}{|B|}\int_{\mathbb{R}^n} |b(x) - b_B|^q \, dx\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \|b\|_{BMO_q} . \end{aligned} \tag{5.3}$$

Quindi la serie (5.1) è assolutamente convergente e

$$\sum_j |\lambda_j| \Big| \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x) b(x)\, dx \Big| \le \Big(\sum_j |\lambda_j| \Big) \|b\|_{BMO_q} \ . \tag{5.4}$$

Per dimostrare che la sua somma non dipende dalla decomposizione atomica di f, basta dimostrare che se $\sum_j \lambda_j\, a_j = 0$, allora la somma (5.1) dà 0.

Ciò è vero se b è limitata. Infatti, essendo $g = \sum_j |\lambda_j|\, |a_j| \in L^1(\mathbb{R}^n)$, per il teorema di convergenza dominata si ha

$$\sum_j \lambda_j \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x) b(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\sum_j \lambda_j\, a_j(x) \Big) b(x)\, dx = 0 \ .$$

Per una generica $b \in BMO_q$, le funzioni b_α introdotte nel Lemma 5.5 sono limitate e dunque

$$\sum_j \lambda_j \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x) b_\alpha(x)\, dx = 0 \ ,$$

per ogni α. Per ogni j, detta B_j la palla su cui ha supporto a_j, si ha

$$\lim_{\alpha \to =\infty} \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x) b_\alpha(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x) b(x)\, dx \ ,$$

perché $b_\alpha \to b$ in $L^q(B_j)$. Inoltre,

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x) b_\alpha(x)\, dx \Big| \le \|b_\alpha\|_{BMO_q} \le 2\|b\|_{BMO_q} \ ,$$

per la (5.3) e per il Lemma 5.5. Applicando dunque il teorema di convergenza dominata alla serie,

$$\sum_j \lambda_j \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x) b(x)\, dx = \lim_{\alpha \to +\infty} \sum_j \lambda_j \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x) b_\alpha(x)\, dx = 0 \ .$$

Il funzionale ℓ è dunque ben definito. Dalla (5.4), passando all'inf sulle decomposizioni in $(1, q')$-atomi di f, si ottiene la (5.2).

Sia ora ℓ un funzionale lineare continuo su $H^1(\mathbb{R}^n)$, e sia $1 < q < \infty$ (il caso $q = 1$ sarà discusso dopo).

Fissata una palla B, consideriamo lo spazio $L^{q'}_0(B)$ delle funzioni $g \in L^{q'}(B)$ con $\int_B g = 0$. Esso è ovviamente un sottospazio chiuso di $L^{q'}(B)$ di codimensione 1 (uno spazio complementare essendo costituito dalle funzioni costanti su B). Se $0 \ne g \in L^{q'}_0(B)$, la funzione

$$a(x) = \frac{1}{|B|^{\frac{1}{q}} \|g\|_{q'}} g(x)$$

è un $(1, q')$-atomo. Quindi $g \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e $\|g\|_{H^{1,q'}} \le |B|^{\frac{1}{q}} \|g\|_{q'}$. Di conseguenza, ℓ definisce un funzionale lineare continuo $\ell_{q',B}$ su $L^{q'}_0(B)$, con norma

$$\|\ell_{q',B}\| \le |B|^{\frac{1}{q}} \|\ell\| \ . \tag{5.5}$$

Essendo $q' < \infty$, (stiamo supponendo $q > 1$), lo spazio duale di $L_0^{q'}(B)$ si identifica con il quoziente $L^q(B)/\{\text{costanti}\}$, nel senso che

(i) esiste $b^{(B)} \in L^q(B)$ tale che $\ell_{q',B}(g) = \int_B g(x) b^{(B)}(x)\, dx$ per ogni $g \in L_0^{q'}(B)$;
(ii) tale funzione $b^{(B)}$ è unica a meno di costanti additive;
(iii) $\inf_{c\in\mathbb{C}} \|b^{(B)} - c\|_q = \|\ell_{q',B}\|$.

Per la (5.5), la (iii) equivale a

$$\inf_{c\in\mathbb{C}} \Big(\frac{1}{|B|} \int_B \big| b^{(B)}(x) - c \big|\, dx \Big)^{\frac{1}{q}} \le \|\ell\| \ .$$

Sia ora B' un'altra palla, contenente B. Esiste allora $b^{(B')} \in L^q(B')$ soddisfacente (i), (ii), (iii). Siccome $L_0^{q'}(B) \subset L_0^{q'}(B')$ e $\ell_{q',B}$ è la restrizione di $\ell_{q',B'}$, segue dall'unicità di $b^{(B)}$ che

$$\{b^{(B)} - c : c \in \mathbb{C}\} = \big\{ (b^{(B')} - c)_{|B} : c \in \mathbb{C} \big\} \ .$$

Consideriamo allora la successione di palle B_k di centro l'origine e raggio k. Fissata $b^{(B_1)}$ che rappresenti il funzionale ℓ_{q',B_1}, possiamo induttivamente determinare rappresentanti $b^{(B_k)}$ dei funzionali ℓ_{q',B_k} in modo che ${b^{(B_k)}}_{|B_{k-1}} = b^{(B_{k-1})}$.

Si ottiene così un'unica funzione $b \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ tale che

(i) $\ell(a) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x) b(x)\, dx$ per ogni $(1, q')$-atomo a;
(ii) per ogni palla $B \subset \mathbb{R}^n$,

$$\inf_{c\in\mathbb{C}} \Big(\frac{1}{|B|} \int_B \big| b^{(B)}(x) - c \big|\, dx \Big)^{\frac{1}{q}} \le \|\ell\| \ .$$

Per il Lemma 5.2, la (ii) equivale a dire che $b \in BMO_q(\mathbb{R}^n)$ e $\|b\|_{BMO_q} \le 2\|\ell\|$.

Rimane da dimostrare che, per una generica $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $f = \sum_j \lambda_j\, a_j$ con a_j $(1, q')$-atomi, $\ell(f)$ è dato dalla (5.1).

Per la (4.10), $f = \lim_{N\to\infty} \sum_{j\le N} \lambda_j\, a_j$ in norma H^1, per cui

$$\ell(f) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j\le N} \lambda_j \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x) b(x)\, dx \ ,$$

dove la serie converge per la (5.4).

Abbiamo dunque dimostrato che per ogni $q \in (1, \infty)$, la corrispondenza

$$b \ \longmapsto \ \ell(f) = \sum_j \lambda_j \int_{\mathbb{R}^n} a_j(x) b(x)\, dx \tag{5.6}$$

è biunivoca tra $BMO_q(\mathbb{R}^n)$ e $H^1(\mathbb{R}^n)^*$ e che $\|b\|_{BMO_q} \cong \|\ell\|$. Siccome la funzione b a secondo membro della (5.6) è unica a meno di costanti additive, si conclude che, per $1 < q < \infty$, $BMO_q(\mathbb{R}^n)$ non dipende da q e che le norme $\| \ \|_{BMO_q}$ sono tra loro equivalenti.

Rimane da discutere il caso $q = 1$. Segue immediatamente dalla definizione di BMO_q che $BMO_q \subset BMO_1$ per ogni $q > 1$ e che $\|b\|_{BMO_1} \le \|b\|_{BMO_q}$. Inoltre la prima parte della dimostrazione (che vale anche per $q = 1$) mostra che ogni $b \in BMO_1$ induce un funzionale $\ell \in H^1(\mathbb{R}^n)^*$ attraverso la (5.6), e che $\|\ell\| \le \|b\|_{BMO_1}$ per la (5.4). Si ha dunque l'inclusione continua $BMO_1(\mathbb{R}^n) \subset BMO_q(\mathbb{R}^n)$ per $1 < q < \infty$. $\square$